

La enseñanza de las operaciones con números naturales

Introducción

Sabemos que la mayoría de las nociones matemáticas que se enseñan en la escuela llevan mucho tiempo de elaboración, por lo que es necesario delinear distintos recorridos precisando el punto de partida y atendiendo al alcance progresivo que debiera tener el tratamiento de las nociones en el aula.

En relación con las Operaciones con Números Naturales este recorrido avanza en el ciclo atendiendo tanto a la variedad de problemas aritméticos en los que las operaciones asumen diferentes significados como a las formas de calcular. Al respecto, en los Cuadernos para el Aula se señala que *“en Segundo Ciclo, es esperable que los alumnos avancen en nuevos significados de la suma, la resta, la multiplicación y la división de los números naturales, y que calculen en forma exacta y aproximada con distintos procedimientos, incluyendo la construcción de otros más económicos. Este trabajo contribuirá a lo largo del ciclo a sistematizar relaciones numéricas y propiedades de cada una de las operaciones”*¹

Para fortalecer ese proceso el trabajo en las secuencias está ligado centralmente con conocimientos que intervienen en la producción y validación de las formas de calcular: las relaciones numéricas y las propiedades de las operaciones. Así, la propuesta para cada grado retoma:

- en cuarto, el repertorio multiplicativo, las propiedades de la multiplicación y las relaciones en la tabla pitagórica y su uso en las distintas formas de calcular;
- en quinto, la explicitación de las relaciones de múltiplo y divisor en la resolución de problemas, así como la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto en contextos matemáticos;
- en sexto, las propiedades de las operaciones y su uso para justificar procedimientos de cálculo

Veamos los contenidos que se abordan en las secuencias tal como se expresan en los NAP.

El reconocimiento y uso de las operaciones entre números naturales y la explicitación de sus propiedades en situaciones problemáticas que requieran:

4 ^{to} grado	5 ^{to} grado	6 ^{to} grado
<p>-multiplicar con distintos significados, utilizando distintos procedimientos y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.</p> <p>- elaborar y comparar distintos procedimientos de cálculo (mental y escrito) de multiplicaciones por una cifra o más, analizando su pertinencia y economía en función de los números involucrados.</p> <p>-analizar relaciones numéricas para formular reglas de cálculo, producir enunciados sobre las propiedades de las operaciones y argumentar sobre su validez.</p>	<p>- dividir con significado de partición evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.</p> <p>-elaborar y comparar procedimientos de cálculo (exacto, mental, escrito y con calculadora) de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones por una o dos cifras, analizando su pertinencia y economía en función de los números involucrados.</p> <p>-argumentar sobre la validez de un procedimiento o el resultado de un cálculo usando relaciones entre números naturales y propiedades de las operaciones.</p> <p>-explicitar relaciones numéricas vinculadas a la división y la multiplicación (múltiplo, divisor, $D=d \times (c+r)$)</p>	<p>-argumentar sobre la validez de un procedimiento o el resultado de un cálculo usando propiedades de las operaciones con números naturales.</p> <p>-producir y analizar afirmaciones sobre relaciones numéricas vinculadas a la división y argumentar sobre su validez.</p> <p>-sistematizar resultados y estrategias de cálculo mental para operar con números naturales.</p>

¹ Para precisar el alcance y el tipo de tratamiento de los contenidos en cada grado se sugiere la lectura de los apartados: Para avanzar en las formas de calcular con números naturales (en Serie Cuadernos para el Aula, Matemática 4 y 5) y Para avanzar en los procedimientos de cálculo con distintos tipos de números (en Serie Cuadernos para el Aula, Matemática 6).

Secuencia para 4to. Grado: Relaciones entre productos. Propósito y comentarios sobre las actividades

Esta secuencia promueve la producción, análisis y validación de diferentes procedimientos de cálculo para multiplicar. Desde un primer uso de la multiplicación y la división en la resolución de problemas extramatemáticos, se avanza luego en el análisis de relaciones numéricas en la tabla pitagórica y en la memorización de los productos que ella contiene para finalizar con la explicitación de las propiedades de la multiplicación y su uso en diferentes cálculos.

El conjunto de las actividades de la secuencia alterna el trabajo en contextos intra y extramatemáticos, incluyendo algún juego. Se alterna también el tipo de tarea que se solicita a los alumnos buscando dar lugar a que decidan, resuelvan, comuniquen en forma oral o escrita, justifiquen, formulen preguntas, cubriendo distintas prácticas propias del trabajo matemático.

Si bien se incluyen problemas en contexto extramatemático, donde la multiplicación se usa con distintos significados, el foco de la secuencia está en el trabajo intramatemático a propósito del uso de las propiedades de la multiplicación para resolver problemas de cálculo.

El repertorio inicial de productos comprende las multiplicaciones de números de una cifra, que luego se amplía para obtener productos donde uno de los factores tiene dos cifras.

Cabe señalar que, si bien sería posible usar las propiedades para resolver multiplicaciones con números más grandes, en esta secuencia se prioriza la producción y el análisis de procedimientos, y se busca fortalecer el repertorio de resultados memorizados y las estrategias de cálculo mental, sin avanzar en el análisis del algoritmo tradicional ni en su dominio.

En función del tiempo disponible, y de los conocimientos del grupo, las Tareas propuestas para cada actividad, pueden ser realizadas en la clase -por todos o por algunos alumnos o quedar como "tarea para la casa". En este último caso será necesario recuperarlas en la clase siguiente.

La propuesta de seguimiento, que identificamos como Actividad 0/11, se ha pensado en relación con la utilización y explicitación de los procedimientos de cálculo y las propiedades de la multiplicación involucradas en la secuencia.

El objetivo inicial es el de obtener información acerca de qué herramientas disponen los estudiantes para encarar las actividades previstas y, a partir de esta información, realizar los ajustes necesarios. Eventualmente podremos diseñar actividades complementarias con el fin de construir "puentes" entre lo que el grupo sabe y lo que consideramos necesario que separe para encarar la secuencia.

Al finalizar el trabajo con la secuencia, la actividad de seguimiento se presentará nuevamente a los alumnos. Para no mantener exactamente las mismas situaciones, en esta segunda presentación será necesario modificar los ejemplos sobre los cuales trabajar, pero prestando especial cuidado a no modificar el tipo de tarea que se requiere, ni el saber necesario para resolverla. Si esta información nos mostrara que algunos alumnos no han avanzado en el sentido previsto, podremos elaborar actividades específicas, que aseguren que todos y todas dispongan del repertorio de productos básicos y puedan usar la multiplicación para resolver problemas y calcular teniendo control sobre los procedimientos utilizados y los resultados obtenidos.

En la **Actividad 1** se proponen situaciones que pueden resolverse con distintos cálculos y en las que la multiplicación se usa con diferentes significados. Se busca recuperar el trabajo realizado en tercer grado en el que seguramente se han presentado problemas que involucran proporcionalidad, incluyendo aquellos que remiten a organizaciones rectangulares, y también otros de combinatoria.

El inicio de la secuencia retoma la idea que, al enseñar las operaciones es conveniente proponer situaciones para que se constituyan, de a poco, en recursos disponibles para resolver problemas donde asuman distintos significados.

Luego de resolver la actividad 3, se podrá volver sobre este problema y observar la relación entre la tabla aquí planteada y una de las filas de la tabla pitagórica, la que contiene los productos $\times 3$.

En la **Actividad 2**, se toman como objeto de análisis los procedimientos realizados en la actividad anterior. Esto permite explicitar nociones que se hayan usado de manera implícita y así advertir el estado de esos conocimientos en el grupo, distinguiendo el uso de la multiplicación del de la suma. Para facilitar la comparación de los procedimientos es útil recuperar, en el contexto del problema, a qué cantidades se refieren los números utilizados en los cálculos (cajas, precios, baldosas, etc.)

En cuanto a la escritura de las conclusiones es importante que, inicialmente los niños escriban como puedan y destinar luego un tiempo a leer y revisar la redacción para elaborar una nueva versión. Si realizáramos esta tarea en menos tiempo para lograr una mejor redacción, los niños perderían una ocasión de aprender cómo escribir un texto matemático.

Ya en un trabajo específico para la construcción del repertorio multiplicativo en la **Actividad 3**, se propone armar la tabla denominada pitagórica, que contiene los productos de números hasta el 10. Se trata primero de establecer relaciones entre los resultados de una misma tabla y entre los de distintas tablas, para luego avanzar en la memorización de los productos. Paralelamente, se sugiere que cada alumno tenga en su cuaderno un cuadro donde registrará los productos que va memorizando para, luego, independizarse de su uso. Si bien es posible que los chicos ya conozcan la tabla desde tercer grado y la hayan usado para resolver multiplicaciones, seguramente será nueva la tarea de análisis y reflexión en torno a las relaciones numéricas involucradas y los procedimientos utilizados al completarlas. La explicitación oral de los procedimientos podrá dar lugar a expresiones como “fui sumando el mismo número”, o “en algunos hice el doble”, o “conté de 5 en 5”, o “si ya sé que 7×8 es 56, el 8×7 es lo mismo”.

Las relaciones expresadas en forma individual, con el alcance particular de cada caso, se toman como objeto de estudio en la actividad que continúa la secuencia.

En la **Actividad 4** se retoman las afirmaciones elaboradas al completar la tabla con la intención de generalizarlas. En este caso las respuestas se hacen por escrito y convendrá revisarlas para asegurarse de que no queden errores.

También se podría preguntar si es posible “seguir” otras tablas además de la del 10 y cómo continuarlas usando los productos ya conocidos.

En las dos actividades siguientes, se propone jugar y reflexionar sobre el juego para favorecer la disponibilidad y posterior memorización de los productos.

El juego en la **Actividad 5**, mantiene el mismo repertorio, pero exige pensar en pares de factores cuyo producto es un número dado. Al jugar en reiteradas oportunidades los alumnos podrán observar que sus progresos en la memorización de las tablas producen mejores resultados.

Es interesante destacar que, al anticipar posibles jugadas del contrario para bloquear su camino, los niños comienzan a buscar descomposiciones en factores de los números y fortalecen así las relaciones entre multiplicación y división.

Es conveniente que al coordinar los intercambios utilicemos los términos “productos” y “factores” para que los niños comiencen a mencionar estos números adecuadamente. También se podrá mencionar que esos factores se denominan “divisores” del número y pedir a los niños que infieran la razón de esa denominación.

Luego de varias partidas, en la **Actividad 6** se da lugar a la explicitación y comparación de la cantidad de descomposiciones en factores que admiten distintos números, descubiertas en el contexto del juego.

En el momento del debate sobre las respuestas que los niños escriban, también podremos incluir preguntas ligadas a la cantidad de divisores de un número cuyas conclusiones se pueden escribir. Por ejemplo: “hay números con más y otros con menos divisores”, “hay números que son divisores de más de un número”, “hay números que tienen sólo dos divisores”, “siempre se puede saber cuántos divisores tiene un número”.

La **Actividad 7** retoma en un contexto extramatemático que un mismo número puede ser el producto de diferentes pares de factores, según cuáles sean los sectores rectangulares de cierta cantidad de filas y columnas que se eligen para calcular. Es importante tener cuidado con las interpretaciones que hagan los niños de las expresiones con más de un signo de operación y que, si no hay paréntesis que indiquen lo contrario, las multiplicaciones deben realizarse antes que las sumas. Eventualmente, habrá que pedir que escriban otras expresiones posibles para la misma situación. Por ejemplo, $3 \times 4 + 3 \times 3 + 3 \times 7 = 3 \times (4 + 3 + 7)$

En la **Actividad 8** se vuelve sobre las relaciones trabajadas en “La tabla de las tablas” y “El gato”, y se propone una nueva tarea: utilizarlas como un recurso para facilitar nuevos cálculos.

Se plantea así, la descomposición de un número en factores, su reagrupación de manera conveniente (uso de las propiedades asociativa y conmutativa) y la descomposición en una suma de productos (uso de la propiedad distributiva), para luego preguntar por la ampliación de estas dos formas de calcular a números más grandes. Es importante que los alumnos puedan relacionar las respuestas que den a esta pregunta con los procedimientos de

cálculo de multiplicaciones que ya conocen, encontrando similitudes y diferencias tanto en los cálculos que intervienen como en la forma de escribirlos.

Si bien en otras actividades de la secuencia se apunta a que los niños elaboren argumentos para validar sus producciones, en la **Actividad 9** el foco está puesto en el análisis de afirmaciones y la producción de otras nuevas. Todas las afirmaciones que se incluyen derivan de las relaciones ya trabajadas.

Recordemos que la actividad matemática en la clase debe incluir, necesariamente, la comunicación de las conclusiones que se obtienen y el análisis de su validez, así como la explicitación de aquello que se ha aprendido y su vinculación con otros conocimientos.

Finalmente, en la **Actividad 10** se propone revisar lo trabajado en las anteriores. Esta actividad contribuye a jerarquizar los conocimientos aprendidos. Al mismo tiempo, dado que se trata de una autoevaluación permite que el alumno tome conciencia de lo que repasó, de lo nuevo que aprendió y también promueve que pueda responsabilizarse de aquellos aprendizajes que aún no ha logrado.

En relación con la **Actividad 0/11** cabe señalar que, tanto cuando se propone al inicio como cuando se hace luego de haber realizado las actividades de la secuencia, su objetivo debe ser explicitado a los alumnos. Comprender el sentido de esta tarea es vital para que los alumnos vayan tomando mayor conciencia acerca de su propio proceso de aprendizaje y puedan enfrentarse a esta instancia con naturalidad y sin temor. Esto les permitirá, eventualmente, escribir “no sé”, “no me acuerdo” o “no me lo enseñaron”. Reconocer, frente a una situación nueva, qué es lo que se puede hacer y qué no, es el primer paso para afrontar nuevos aprendizajes.

Para resolver el problema 1 -que involucra proporcionalidad con organización rectangular de sus elementos y con cantidades de dos cifras- se pueden usar distintos procedimientos apoyados en descomposiciones aditivas y/o multiplicativas aunque, previo al inicio de la secuencia, algunos niños podrían usar la suma o apoyarse en un dibujo. La mini-tabla puede ser completada a partir de productos ya memorizados o recurriendo a las relaciones analizadas en la secuencia, cuestión que todos los niños tendrán que poder explicitar en la segunda instancia, aunque no lo hubieran hecho en la primera.

Los dos procedimientos para un cálculo se pueden analizar considerando las propiedades de la multiplicación y que deberán ser explicitadas al justificar la respuesta dada. Para algunos niños tal vez sea posible, antes del inicio de la secuencia, decir que Víctor tiene razón aunque no puedan decir por qué, cuestión sobre la que tendrían que mostrar algún avance al finalizar.

Por último, se vuelve sobre la necesidad de explicitar los conocimientos pendientes en relación con el propósito de enseñanza.

Actividades

Ya sabés usar muchos productos para resolver problemas y seguramente recordás algunos de memoria. ¿Cómo podés usarlos para pensar otros? ¿Cómo se puede transformar una cuenta para hacerla más fácil?

Actividad 1: En la escuela

a) Esta es la factura de la compra de librería que realizó la escuela este mes.

Cantidad	Descripción	Precio unitario	Precio total
10	Cajas de tizas	3	\$
.....	Borradores	2	\$ 10
6	Reglas	8	\$
12	Láminas	\$ 120
			\$

- Completá los datos que faltan.

- Para averiguar la cantidad de borradores o el precio unitario de las láminas, ¿qué operación usaste? ¿Y para calcular el total pagado por las cajas de tizas? ¿Y por las reglas?

b) Escribí cálculos que permitan averiguar cuántas baldosas hay en el patio de la escuela, que tiene la siguiente forma:

c) Para el Día de Fiesta en la escuela, se está preparando un menú especial.

Comidas	Postres
Empanada, pizza, chorizan, hamburguesa	frutas, helados, torta

- ¿Cuántas opciones posibles hay para combinar una comida y un postre? ¿Cómo lo averiguaste?

d) Para colocar cortinas en las aulas, se necesitan 3 m de tela para cada ventana ¿Cuánta tela deberán comprar si deben colocar 10 cortinas? ¿Y para 20, para 5 o para 25 cortinas? Si tienen 66 m ¿cuántas cortinas se pueden confeccionar?

Cantidad de cortinas						
Metros de tela						

Actividad 2: Las cuentas en los problemas

- Reunte con un compañero y comparen los procedimientos que utilizaron para responder a las preguntas de la Actividad 1.

- ¿Qué tienen en común?
 - ¿En qué se diferencian?
 - ¿En qué casos utilizaron multiplicaciones? ¿Y sumas?
 - ¿Es cierto que si se usa la multiplicación para resolver un problema, ese problema también se puede resolver sumando?
 - ¿Es cierto que si se suma para resolver un problema, ese problema también se puede resolver multiplicando?
- Registren sus conclusiones para compararlas con las de otros compañeros.

Tarea

Escribí el enunciado de un problema que se pueda resolver usando 8×9 y otro usando $8 + 9$.

Actividad 3: La tabla de las tablas

a) Completá la tabla con los resultados de las multiplicaciones que recuerdes. Tené en cuenta que en el cuadro figura el resultado de 3×4 , ¿dónde ubicarías 4×3 ? ¿Por qué?

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3				12						
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

- b) Compartí tu trabajo con otros compañeros y terminá de completar con un lápiz de otro color, los casilleros que falten.
c) Explicá tus procedimientos.

Tarea

Anotá 10 productos que recuerdes de memoria, que no sean ni por 2 ni por 1, ni por 10.

Actividad 4: Los secretos de la tabla

- a) - Considera las columnas del 5 y del 10. Algunos chicos dicen que estos productos son fáciles de recordar; ¿estás de acuerdo? ¿Por qué?
- Si se compara cada número de la columna del 5 con cada uno de los de la columna del 10 para la misma fila, ¿qué relación tienen?
- b) - ¿Qué columnas se pueden duplicar para obtener otras?
- ¿Cómo se pueden obtener los números de la columna del 8 partiendo de los de la columna del 2?
- c) Si se compara cada número de la columna del 2 con cada uno de los de la columna del 6 para la misma fila, ¿qué relación tienen? ¿Y si se compara con la del 10?
- d) ¿Qué columnas es posible sumar para obtener otra?
- e) - Si continuamos la columna del 10 poniendo los casilleros para 11×10 , 12×10 , hasta el 19×10 , ¿qué números escribirían como productos?
- ¿Podés decir rápidamente cuánto da 35×10 ?, ¿por qué?

Tarea

¿Es cierto que para calcular 6×8 se puede hacer...? ¿Por qué?

$3 \times 8 \times 2$

$6 \times 4 \times 4$

$4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$6 \times 5 + 6 \times 3$

$8 \times 4 + 8 \times 2$

$3 \times 2 + 4 \times 2$

Actividad 5: El juego del Gato

Júntense en grupos de cuatro compañeros y, dentro del grupo, formen dos equipos de dos. Para jugar, cada grupo va a necesitar un tablero, 2 botones (o clips) y 36 fichas de dos colores diferentes.

1	2	3	4	5	6			
7	8	9	10	12	14			
15	16	18	20	21	24			
25	27	28	30	32	35			
36	40	42	45	48	49			
54	56	63	64	72	81			
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Cada equipo tiene que tomar las fichas de un color. Un jugador del primer equipo elige 2 números de la fila de factores del 1 al 9, los marca con los botones y multiplica estos números. Una vez que obtiene el producto de esta multiplicación, coloca una ficha de su color en la casilla del cuadro que contiene ese producto. Por ejemplo, si colocó los botones en el 5 y 6, colocará la ficha en el 30.

Después, un jugador del otro equipo mueve sólo uno de los botones a otro número en la fila de factores. Otra vez, este jugador multiplica los números que están señalados y coloca una ficha de su color en la casilla del producto. Por ejemplo, mueve el botón del 6 al 8 y le queda entonces $5 \times 8 = 40$. Los equipos siguen alternando turnos y gana el que cubre 4 casillas en línea, sin espacios vacíos en medio. La línea puede ser horizontal, vertical o diagonal.

Para tener en cuenta al jugar...

- Ambos botones se pueden colocar en el mismo número. Por ejemplo, si los dos están en el 5, el jugador deberá colocar una ficha en el producto de 5×5 (es decir, en el 25).
- Si un jugador marca dos números en la fila de factores y obtiene como producto un número cuya casilla ya ha sido tomada, pasa el turno al equipo contrario.
- Si alguno de los jugadores descubre que su contrincante comete un error en la multiplicación, puede capturar la casilla correcta (o sea, coloca una ficha de su color), tras decir el producto correcto.

Tarea

En el juego, ¿qué productos podés elegir para marcar el 12? ¿Y el 36? Anotalos.

Actividad 6: Después de jugar

- a) Andrés dice que él siempre empieza colocando un clip en el 6 y otro en el 6 y marca el 36. En cambio, Julieta dice que ella comienza en cualquier lugar.
¿Quién te parece que tiene más posibilidades de ganar? ¿Por qué?
- b) ¿Hay números que son más fáciles de completar? ¿Por qué?
- c) ¿Dónde conviene colocar los clips? ¿Por qué?
- d) ¿Por qué pensás que no está el 17 o el 29 en el tablero?

Después de pensar sobre estas preguntas, jueguen otra vez al juego del Gato, pero ahora con otro tablero.

11	12	14	15	16	18	20					
21	22	24	25	27	28	30					
32	33	35	36	40	42	44					
45	48	49	50	54	55	56					
60	63	64	66	70	72	77					
80	81	84	88	90	96	99					
100	108	110	120	121	132	144					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Tarea

Elegí 3 números del tablero que se puedan obtener con distintas multiplicaciones y anotá dos o tres para cada uno.

Actividad 7: El festival

Para el festival de la escuela, se deben acomodar en filas 40 sillas para los invitados.

- a) La portera dice que hay 8 maneras diferentes para acomodar las sillas de manera rectangular. ¿Cuáles son?
- b) El día del festival, llegaron muchos invitados y hubo que agregar sillas. En el dibujo se ve cómo quedaron ordenadas.
Sin resolver los cálculos, ¿cuál o cuáles permiten averiguar la cantidad total de sillas? Explicá tus elecciones.

$$6 \times 4 + 9 \times 4 =$$

$$4 \times 10 + 4 \times 5 =$$

$$3 \times 4 + 3 \times 3 + 3 \times 7 =$$

$$6 \times 10 =$$

$$4 \times 4 + 4 \times 5 + 4 \times 6 =$$

$$9 \times 10 =$$

- c) Haciendo $9 \times 10 - 6 \times 5$, ¿también se puede calcular? Explicá cómo se puede pensar.
 d) Más tarde, para la entrega de premios, recomodaron todas las sillas en 6 filas ¿Cuántas sillas se colocaron en cada fila?

Tarea
 ¿Cuántas formas de acomodar las sillas habría si fueran 80?
 ¿Y si fueran 100?

Actividad 8: Multiplicar más fácil

- a) David dice que cuando él no se acuerda de algún producto, como 6×8 , lo piensa así:
 $6 \times 8 = 6 \times 4 \times 2 = 24 \times 2 = 48$
 - ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?
 - Buscá otros productos de la tabla del 8 que no te acuerdes y pensálos como lo hizo David.
 b) Para resolver 9×7 , Ema pensó:
 Como 7 es igual a $5 + 2$ puedo hacer: $9 \times 5 = 45$ y $9 \times 2 = 18$ y sumar ambos resultados $45 + 18 = 63$
 ¿Estás de acuerdo con lo que hizo Ema? ¿Por qué?
 c) ¿Se te ocurren otras formas para calcular 9×7 ? ¿Cuáles?
 d) ¿Cómo le explicarías a un amigo los procedimientos de David y Ema para resolver multiplicaciones con números más grandes?

Tarea
 a) Para calcular 38 por 99, Yesi hace $3800 - 38$, porque dice que es más fácil restar que multiplicar. ¿Está bien lo que hace? ¿Por qué?
 b) Andrés dice que para multiplicar un número por 15, le agrega un cero al número y después suma la mitad de lo que le dio. Por ejemplo: $32 \times 15 = 320 + 320 : 2 = 320 + 160 = 480$
 Este método, ¿sirve para multiplicar cualquier número por 15? ¿Por qué?

Actividad 9: ¿Vale o no vale?

- a) Decidí si las siguientes afirmaciones son o no verdaderas, y explicá por qué.
 - Todos los números de la tabla del 8 se obtienen multiplicando por 2 tres veces
 - Todos los números de la tabla del 4 se obtienen sumando 2 a los números de la tabla del 2.
 - Todos los números de la tabla del 6 se obtienen multiplicando por 3 los números de la tabla del 2.
 - Todos los números de la tabla del 5 se encuentran sumando los de la tabla del 3 con los de la tabla del 2.
 b) Escribí otras afirmaciones sobre las tablas que sean verdaderas para compartir en clase.

Actividad 10: Mirar lo que aprendimos

- a) ¿Qué actividades te resultaron más fáciles?
- b) ¿Cuáles te costaron más? ¿Por qué pensás que te resultaron más difíciles?
- c) ¿Cuáles son los resultados de las multiplicaciones que ya conocías y pudiste utilizar?
- d) ¿Cómo podés usar los resultados conocidos para pensar otros?
- e) ¿Aprendiste alguna forma nueva de resolver multiplicaciones? ¿Cuál?
- f) ¿Tendrías que repasar algo más para poder resolver cualquier multiplicación y poder controlar si el resultado es correcto?

Actividad 0/11: ¿Qué sabemos?

1. En el teatro

- a) ¿Cuántos espectadores asistieron al espectáculo del teatro *Esplendor* si se llenaron todas las butacas? Ese teatro tiene 25 filas de 12 butacas cada una.
- b) Para una función especial, están invitados 360 personas. ¿Cuántas filas corresponden agregar? ¿Por qué?

2. Mini tabla

- a) Completá la siguiente tabla

x	4	8	3	7	11
3					
6					
9					

- b) ¿Qué tuviste en cuenta para completarla?

3. Para explicar

Victor dice que para resolver 7×9 , hace $7 \times 9 = 7 \times 3 \times 3$
 Entonces, Valeria propone hacer $7 \times 9 = 7 \times 3 + 7 \times 3$
 ¿Alguno tiene razón? ¿Por qué?

4. Para registrar lo que aprendiste

¿Hay alguna tabla que no sepas? ¿Cuál?

Secuencia para 5to. Grado: Múltiplos y divisores
Propósito y comentarios sobre las actividades

Esta secuencia promueve el análisis de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto para avanzar, cuando el resto es cero a considerar las nociones de múltiplo y divisor. Se inicia con un conjunto de problemas vinculados a la proporcionalidad, se avanza luego en el uso de múltiplos y múltiplos comunes a dos o más números en el contexto de un juego, para analizar finalmente afirmaciones sobre relaciones entre múltiplos de distintos números, entre divisores y entre los elementos que intervienen en la división entera. El conjunto de las actividades de la secuencia alterna el trabajo en contextos intra y extramatemáticos, incluyendo algún juego. Se alterna también el tipo de tarea que se solicita a los alumnos buscando dar lugar a que decidan, resuelvan, comuniquen en forma oral o escrita, justifiquen, formulen preguntas, cubriendo distintas prácticas propias del trabajo matemático. En las actividades se incluyen problemas en contexto extramatemático, donde la división se usa con significado de partición (el divisor indica el tamaño de la parte y no la cantidad de partes como ocurre en los repartos), pero el foco de la secuencia está en el trabajo intramatemático. Este trabajo se plantea a propósito del reconocimiento de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto, y el análisis de las nociones de múltiplo y divisor, sin avanzar en la explicitación de los criterios de divisibilidad ni en la práctica de descomposiciones de un número en factores primos. Para ello se trabaja fundamentalmente con números de dos cifras, y algunos de tres, priorizando las estrategias de cálculo mental, sin avanzar en el estudio de los algoritmos para dividir ni en su dominio. Dado que las posibilidades de abordar las nuevas nociones en juego mejoran si los alumnos dominan el repertorio multiplicativo, conviene revisar con los alumnos su disponibilidad. En función del tiempo disponible, las Tareas propuestas para cada actividad, pueden ser realizadas en la clase -por todos o por algunos alumnos- o quedar como "tarea para la casa". En este último caso será necesario recuperarlas en la clase siguiente. La propuesta de seguimiento, Actividad 0/11, se ha pensado en relación con la utilización y explicitación de las nociones de múltiplo y divisor involucradas en la secuencia. El objetivo inicial es el de obtener información acerca de qué

herramientas disponen los estudiantes para encarar las actividades previstas y, a partir de esta información, realizar los ajustes necesarios. Eventualmente podremos diseñar actividades complementarias con el fin de construir “puentes” entre lo que el grupo sabe y lo que consideramos necesario que sepa para encararla. Al finalizar el trabajo con la secuencia, las actividades de seguimiento se presentarán nuevamente a los alumnos. Para no mantener exactamente las mismas situaciones, en esta segunda presentación será necesario modificar los ejemplos sobre los cuales trabajar, pero prestando especial cuidado a no modificar el tipo de tarea que se requiere, ni el saber necesario para resolverla. Si esta información nos mostrara que algunos alumnos no han avanzado en el sentido pre-visto, podremos elaborar actividades específicas, que aseguren que todos y todas puedan explicitar relaciones entre los números que intervienen en una división, usar la división para resolver problemas, y calcular teniendo control sobre los procedimientos utilizados y los resultados obtenidos.

La **Actividad 1**, en el contexto de envasado de golosinas en los que se va modificando el número de golosinas a envasar y la cantidad de golosinas en cada envase, apunta a retomar la división como partición y la cuenta de dividir con números pequeños, focalizando la atención en si tiene resto cero o no. Además de calcular, se busca que los alumnos expliciten relaciones entre los números.

Luego, en cuatro actividades, dos instancias de juego y las respectivas de reflexión, se avanza con la idea de múltiplo de un número y se obtienen conclusiones sobre múltiplos comunes a varios números y la forma de determinar si un número es o no múltiplo de otro.

En el juego planteado en la **Actividad 2**, la estrategia del colocador de trampas consistirá, en todos los casos, en buscar números que bloqueen totalmente el camino. Para esto, los niños deberán, poco a poco, desarrollar estrategias de cálculo mental para buscar números que estén contenidos en dos series a la vez.

Si bien esta primera versión es sencilla, se trata de lograr una efectiva comprensión de las reglas para luego complejizarlas. Durante el juego es importante controlar que se juegue un número par de veces (4 ó 6), para que ambos equipos tengan la misma oportunidad de obtener chapitas.

En la **Actividad 3** de reflexión sobre el juego, la tarea es analizar posibles jugadas para identificarlos “mejores” lugares (múltiplos comunes a 2 y 3) y los “peores” lugares (números que no están en ninguna de las dos tablas).

El juego se presenta con nuevas reglas en la **Actividad 4**. Para elegir dónde ubicar las trampas hay distintas estrategias posibles: poner una trampa que sea común para tres saltos distintos y otra para el salto restante o poner 2 trampas, cubriendo dos saltos con cada una. En ambos casos se necesita encontrar un múltiplo común.

La **Actividad 5** vuelve sobre el juego planteando otras tareas. No sólo es necesario identificarlas diferentes alternativas, sino también considerar números que ya no estén en la tira como 122 ó 137. Por otra parte, es necesario formular por escrito las explicaciones sobre las estrategias para ganar y por qué funcionan. Y también, utilizar la estrategia explicitada para saber si la pulga va a caer o no en un número cualquiera. Esta pregunta apunta a un avance en la generalidad de lo que se dice y habrá que ser cuidadoso en la gestión para identificar las afirmaciones que mencionan a múltiplos de algunos números particulares y aquellas que se refieren a números cualesquiera.

Las visitas de las amigas, el orden de las fotos y los regalos a los nietos en la **Actividad 6** son contextos no matemáticos que permiten plantear problemas verosímiles en los que intervienen las nociones de múltiplo y divisor.

En la **Actividad 7** se amplía el trabajo que se viene haciendo con el juego. Ya no hay que pensar sólo en los múltiplos del número del salto (n veces s) sino en los múltiplos más un cierto número menor que el del salto: los múltiplos de 4 más 3, por ejemplo. Como sabemos, esto puede escribirse

$$n \times s + c \quad \text{donde } c < s$$

Es decir que lo que está en juego es la relación que define la división entera. Y esto se pone en evidencia tanto en las preguntas del problema de los lápices como en el de los números.

En el caso de la **Actividad 8**, se trata de elaborar afirmaciones sobre el número de divisores o de múltiplos de un número y las estrategias para buscarlos, el análisis de regularidades en un conjunto de múltiplos como aproximación a una regla de divisibilidad (sin avanzar en la enunciación de los criterios), y a la suma de múltiplos.

Nuevamente es importante señalar que las formulaciones de las respuestas de los alumnos tendrán diferentes niveles de generalidad y seguramente serán mayoría aquellas que se apoyen en ejemplos particulares. Dado que se trata de poner el acento en las relaciones entre los números, el repertorio elegido es el de números de hasta 3 cifras con cálculos que se esperaban hacer mentalmente.

La **Actividad 9** lleva a revisar conclusiones obtenidas durante el desarrollo de las actividades anteriores, proponiendo una tarea distinta: la de revisar su formulación, ajustando el sentido de lo que se afirma, el lenguaje utilizado y el alcance de su validez. Esto contribuye a sistematizar los nuevos aprendizajes y a establecer relaciones con otros conocimientos.

Finalmente, en la **Actividad 10** se propone revisar lo trabajado en las anteriores. Esta actividad contribuye a tomar conciencia sobre el propio proceso de estudio, a modo de autoevaluación, y a jerarquizar los conocimientos aprendidos.

En relación con la **Actividad 0/11** cabe señalar que, tanto cuando se propone antes como cuando se hace luego de haber realizado las actividades de la secuencia, su objetivo debe ser explicitado a los alumnos. Comprender el sentido de esta tarea es vital para que los alumnos vayan tomando mayor conciencia acerca de su propio proceso de aprendizaje y puedan enfrentarse a esta instancia con naturalidad y sin temor. Esto les permitirá, eventualmente, escribir “no sé”, “no me acuerdo” o “no me lo enseñaron”. Reconocer, frente a una situación nueva, qué es lo que se puede hacer y qué no, es el primer paso para afrontar nuevos aprendizajes.

El problema 1, involucra la búsqueda de un múltiplo común, cuestión que se aborda en los juegos de La Pulga, pero los chicos también podrían resolverla usando un esquema gráfico o sumando. En el problema 2 se debe realizar la tarea inversa, considerar si un número dado es o no múltiplo de uno o de dos números establecidos. Es posible que, antes de iniciar la secuencia, algunos alumnos puedan hacer el ítem a) pero no los otros, situación que debería modificarse luego.

El problema 3 plantea dos divisiones, una con resto cero y otra no, para considerar en cuáles esos casos el dividendo es múltiplo del divisor.

Por último, en el problema 4 se pide explicitar la forma de saber cuando un número es múltiplo o divisor de otro. En estos dos últimos problemas interesará advertir cómo se modifican las explicaciones que den los chicos.

Actividades

Seguramente ya sabés hacer cuentas de dividir de distintas formas y poder hacerlo te permite resolver muchos problemas. Pensando en una división, ¿podés saber antes de hacerla si vas a tener resto cero o no? ¿Cómo se puede saber para un número cuáles son “todos” los números por los que lo podés dividir y te van a dar resto cero?

Actividad 1: En el kiosco

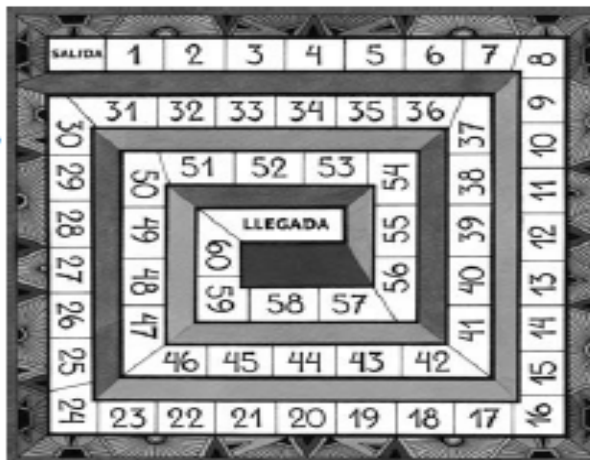
- a) Con una caja de 150 caramelos se quieren armar bolsitas de 15 caramelos cada una.
- ¿Cuántas bolsitas se pueden llenar?
 - Si se compran 50 caramelos más, ¿cuántas bolsitas de 15 caramelos cada una puede llenar?
 - ¿Sobraron caramelos? ¿Cuántos?
 - Si de entrada se hubieran comprado 200 caramelos, ¿cuántas bolsitas de 15 caramelos cada una, se hubieran llenado?
 - Con 200 caramelos, si en cada bolsita se colocan 20 caramelos en lugar de 15, ¿se llenan más o menos bolsitas? ¿Por qué?
- b) Se quieren armar cajas con chocolates. Si se ponen 6 chocolates en cada caja no sobra ninguno. Si se ponen 10 en cada caja tampoco sobra ninguno. ¿Cuántos chocolates puede haber si hay entre 50 y 100? ¿Y si hubiera entre 100 y 150?

Tarea

Si se quiere dividir 40 entre 5, 8, 4 y 9, ¿en qué casos el resto es cero? ¿Y si se divide 45 ó 32 por esos mismos números?

Actividad 2: El juego de La pulga y las trampas

Júntense en grupos de 4 compañeros y dentro de cada grupo formen dos equipos de 2 chicos. Para jugar, cada grupo va a necesitar un tablero, 20 fichas (pulgas) y una piedrita (para poner la trampa) por cada equipo (es decir, 40 pulgas y 2 trampas).



La pulga va a saltar sobre la tira y puede hacerlo con saltos iguales de 2 en 2 ó de 3 en 3. Uno de los equipos comienza colocando una "trampa" (piedrita) sobre uno de los números del tablero. Esta vez, van a jugar con los números del 1 al 20. El otro equipo toma su pulga y elige con qué salto va a recorrer el tablero (de 2 en 2 ó de 3 en 3) y hace avanzar la "pulga" con los saltos del tamaño que haya escogido, tratando de no caer en las trampas. Si la pulga logra atravesar todos los casilleros sin caer en la trampa, ese equipo se queda con su ficha; si cae en la trampa, tiene que entregársela el equipo contrario. En la segunda vuelta, se alternan los roles: el equipo que había saltado con la pulga ahora pone la trampa y el que había puesto la trampa ahora toma la pulga y elige con que salto va a recorrer el tablero. El equipo ganador será el que logre quedarse con más fichas.

Tarea

Escribí tres números que sean buenos para poner la trampa y explicá por qué los elegiste.

Actividad 3: Después del juego

- Fijate dónde ponen la trampa estos chicos y respondé para cada uno: ¿te parece que es un buen lugar para la trampa? ¿Por qué?
 - Matías puso la trampa en el 7. - Lucía puso en el 10.
 - Silvia puso en el 18. - Malena puso en el 15.
- De los números del 1 al 20, hacé una lista con aquellos que:
 - sean los mejores para poner la trampa
 - sean los peores para poner la trampa.
- Si la tira de números fuera hasta el 30:
 - ¿qué números de la tira convienen más?
 - ¿cuáles no convienen?

Tarea

- Bruno dice que si se divide 18 por 2 seguro da resto cero, pero si se divide 18 por 3 no porque termina en 8. ¿Estás de acuerdo?
- Escribí dos ejemplos de números de 2 cifras que tengan más de 3 divisores.

Actividad 4: Más trampas para las pulgas

Vuelvan a jugar con el tablero "La pulga y las trampas" pero, esta vez, usando los números del 1 al 60. Y además.... El equipo que coloca la trampa, en lugar de una colocará dos y el equipo que hace saltar a la pulga podrá elegir saltar de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4 ó de 5 en 5.

Después de jugar, respondan:
Para el equipo que coloca las trampas, ¿qué estrategia le permite ganar más fichas?
¿Y para el equipo que lleva la pulga?

Tarea

Escribí tres números entre el 30 y el 60 que sean buenos para poner una trampa que atrape, a la vez, a una pulga que salta de a 3 y otra de a 4.

Actividad 5: Reflexiones y nuevos cálculos sobre La pulga

En esta nueva versión del juego:

- ¿Cómo pensaron las trampas? Escribí tu estrategia para ganar al colocarlas.
 - ¿Por qué consideras que funciona tu estrategia?
- Si la tira se extiende, y la pulga puede elegir saltar de a 2, de a 3, de a 4 ó de a 5:
 - ¿podría caer en el 123? ¿Por qué?
 - ¿y en el 137? ¿Por qué?

- c) Si se sabe que la pulga cayó en el 122, ¿se puede saber de a cuánto saltaba?
 d) Si la pulga avanza de 4 en 4, ¿llega justo al número 96? ¿y al 1234?
 e) Explicá cómo se puede hacer para saber si la pulga va a caer o no en un número cualquiera.

Tarea

- I. ¿Es cierto que si en una trampa caen las pulgas que saltan de a 4, también caen las que saltan de a 2? Y si en otra trampa caen las que saltan de a 2, ¿seguro caen las que saltan de a 4?
 II. ¿Cuál es el resto de dividir 126 por 4? ¿Y el resto de dividir 127, 128, ó 129 por 4?

Actividad 6: Una abuela organizada

- a) En el barrio hay una abuela muy organizada. Tiene seis amigas con las que mantiene un cierto rito de visitas. La primera amiga la visita cada dos tardes; la segunda, cada tres tardes; la tercera, cada cuatro tardes y así sucesivamente hasta la sexta amiga, la cual ve cada séptima tarde.
 - Si hoy se encontraron todas, ¿cuántos días faltan para que se vuelvan a encontrar?
 - ¿Algún día se encuentran tres? ¿Y dos?
 b) La abuela no es tan organizada al momento de ordenar sus fotos. No logra determinar cuántas tiene exactamente. Sin embargo, sabe que si las ordena de a 5, le sobran 4 y si las coloca de a 3 le sobran 2. Si tiene entre 50 y 70, ¿cuántas fotos son en total?
 c) La abuela debe mandar unos regalos a sus nietos, que viven uno en Salta y otro en Neuquén. En la terminal de micros le informan que salen micros a Salta cada 6 horas y a Neuquén cada 9 horas. Si a las 10 de la mañana coincide la salida de ambos micros y a esa hora no puede ir, ¿a qué hora le conviene ir a la terminal para despachar los dos paquetes al mismo tiempo?

Tarea

- I. Escribí tres números que puedan dividirse por 5 y por 4 de modo que el resto sea cero.
 II. Desde una fábrica se tienen que transportar 49 cocinas. Por el peso, cada camioneta puede transportar 7 cocinas. Si pudiesen transportar una cocina más en cada una de las camionetas, ¿se podrían hacer menos viajes? ¿Cuántas cocinas debería poder transportar un camión para hacer 5 viajes?

Actividad 7: ¿Sobra o no sobra?

- I. Si Lucía cuenta sus lápices de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4 siempre le sobra uno. Cuando los cuenta de a 5 no le sobra ninguno.
 a) ¿Cuántos lápices puede tener?
 b) ¿Cuántos lápices tiene si sabemos que tiene menos de 50?
 II. Con las cifras 1, 2, 4 y 5:
 a) Escribí números de 3 cifras sin repetir que sean múltiplos de 2. ¿Cuál es el número más grande que puede formarse?
 b) ¿Y si se trata de formar el mayor número de tres cifras que sea múltiplo de 5?
 c) Cambiá los números que escribiste en a) para que, al dividirlos por 2, el resto sea 1.
 III. Matías dividió a 89 y 102 por un mismo número. En la primera cuenta obtuvo resto 9 y en la segunda, resto 12. ¿Por qué números pudo haber dividido Matías estos números?

Tarea

- I. Hay 60 chupetines, 75 juguetitos de cotillón y 120 caramelos para armar bolsitas de regalo para los chicos de un cumpleaños. Si se quiere usar todo y armar bolsitas iguales que contengan el mayor número posible de cada cosa. ¿Cuál es el máximo número de bolsitas se pueden armar?
 II. Explicá como encontrás un número que al dividirlo por 3 tenga resto 2.

Actividad 8: Desafíos con múltiplos y divisores

- I. a) Los números que terminan en 0, ¿de qué número son múltiplos? ¿Y los que terminan en 5?
 b) Los números múltiplos de 2, ¿pueden terminar en 3? ¿Y en 8? ¿Y en 5? ¿Por qué? Escribí la lista de los números en los que puede terminar un múltiplo de 2.
 c) Si un número es múltiplo de 3 y otro número también es múltiplo de 3, ¿es cierto que la suma de los dos también es múltiplo de 3? ¿Por qué?
 II. a) Sara dice que para buscar los divisores de un número ella escribe varias cadenas desarmando el número en factores. Para 24 hace así:
- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| 24 | 24 | 24 |
| 8 x 3 | 12 x 2 | 6 x 4 |
| 2 x 4 x 3 | 6 x 2 x 2 | 3 x 2 x 2 x 2 |
| 2 x 2 x 2 x 3 | 3 x 2 x 2 x 2 | |

Mirando lo que hizo Sara, anotá todos los divisores de 24.

¿Te parece que el método de Sara sirve para otros números? Pensá algún ejemplo.

- b) Mariano dice que, para buscar los divisores de un número, él piensa los divisores por pares porque si un número se escribe como producto de dos factores, cada factor es divisor del número. Por ejemplo para 12 piensa 4×3 , y 2×6 y 1×12 . ¿Te parece que el método de Mariano sirve para otros números? Pensá algún ejemplo.
- c) Silvia dice que para buscar los múltiplos ella no encuentra un método que le permita escribir todos. ¿Por qué te parece que le pasa eso?

Tarea

- a) Descomponé en factores el 60 y el 72. ¿Hay números que sean divisores de 72 pero no de 60? ¿Y que sean divisores de 60 pero no de 72?
- b) Si $N = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$, ¿Cuáles de los siguientes números son divisores de N ?
14 27 35 36 45

Actividad 9: ¿Vale o no vale?

- a) Decidí si es cierto que...
- Si un número es múltiplo de 4, también es múltiplo de 2
 - Si un número es múltiplo de 2, también es múltiplo de 4
 - Si un número es múltiplo de 6, cuando se lo divide por 3 da resto cero
- b) ¿Será verdad que si un número es divisor de otro, el segundo es múltiplo del primero? ¿Por qué?
- c) Indicá si las siguientes afirmaciones son correctas. Explicá cada una de tus respuestas.
- La cantidad de múltiplos de un número es infinita.
 - Los divisores de un número son menores que el número.
 - La cantidad de divisores de un número es infinita.

Actividad 10: Mirar lo que aprendimos

- a) ¿Qué actividades te resultaron más fáciles?
- b) ¿Cuáles te costaron más? ¿Por qué piensas que te resultaron más difíciles?
- c) ¿Cómo se puede saber si vas a tener resto cero antes de hacer una división?
- d) Poné un ejemplo de un número de tres cifras que tenga cuatro divisores y explicá cómo lo encontraste.
- e) ¿Cómo le explicarías a un compañero qué quiere decir que un número es múltiplo de otro? ¿Y que es divisor?
- f) ¿Tendrías que repasar algo más para poder resolver problemas usando las relaciones de múltiplo y divisor?

Actividad 0/11: ¿Qué sabemos?

1. En las elecciones

En una República Democrática las elecciones presidenciales son cada 4 años, las de gobernadores son cada 6 años y las de senadores son cada 8 años. Si en el año 2000 coincidieron las elecciones, ¿cuándo volverán a coincidir?

2. Contando de a 3 y de a 5

Dos amigos cuentan partiendo del 0. Malena dice los números que van de 3 en 3 y Mariano los que van de 5 en 5.

- a) ¿Cuáles son los primeros 10 números que menciona cada uno?
- b) Si siguen contando, ¿Malena puede decir el 324? ¿Por qué?
- c) ¿Puede ser que los dos digan el 815? ¿Por qué?
- d) Escribí tres números de tres cifras que pueden llegar a decir los dos.

3. Para explicar

I. Lucía dice que como $12 \times 8 = 96$, seguro que $98 : 8$ tiene resto.

¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

II. a) ¿Cómo podés estimar el resultado de la división $75 : 14$?

b) ¿Va a tener resto? ¿Cómo podés saberlo antes de hacerla en la calculadora?

4. Para registrar lo que aprendiste

¿Cómo te das cuenta que un número es múltiplo de otro?

¿Cómo te das cuenta que un número es divisor de otro?

Secuencia para 6to grado: Procedimientos de cálculo y propiedades Propósito y comentarios sobre las actividades

Esta secuencia promueve el análisis de las transformaciones numéricas realizadas a lo largo de un procedimiento de cálculo para determinar cuáles son válidas y cuáles no en función de las propiedades de la multiplicación y la división.

Comienza revisando cómo combinar varias operaciones en función de un cierto enunciado en función de un cierto número a obtener como resultado, y avanza luego en la comparación de procedimientos de cálculo para finalmente explicitar las propiedades y analizar su validez.

El conjunto de las actividades de la secuencia alterna el trabajo en contextos intra y extramatemáticos, incluyendo algún juego. Se alterna también el tipo de tarea que se solicita a los alumnos buscando dar lugar a que decidan, resuelvan, comuniquen en forma oral o escrita, justifiquen, formulen preguntas, cubriendo distintas prácticas propias del trabajo matemático.

Este trabajo se plantea fundamentalmente a propósito de diferentes modos de calcular multiplicaciones y divisiones, reconociendo las propiedades que justifican esos procedimientos y analizando sus ventajas y sus límites. Se propone estudiar distintas alternativas para resolver problemas de cálculo, evitando asumir que existe una única estrategia que se aplica de forma automática para cualquier par de números que se necesita multiplicar o dividir.

Dado que estos procedimientos se apoyan en un cierto repertorio de estrategias y resultados de cálculo mental, la disponibilidad de este repertorio debe asegurarse previamente al inicio de la secuencia.

Por otra parte, y para que este desafío de análisis de procedimientos y de establecimiento de relaciones sea posible, es necesario trabajar con cuentas que no sean muy largas, de modo que los alumnos puedan mantener la atención. Los ejemplos con números más grandes sólo se incluyen con el propósito de explorar cómo “hacer funcionar” un procedimiento u otro, y no para ejercitar el cálculo de divisiones largas, cuestión que no es pertinente incluir atendiendo al propósito de esta secuencia.

En función del tiempo disponible, las Tareas previstas para cada actividad pueden ser realizadas en la clase -por todos o por algunos alumnos- o quedar como “tarea para la casa”. En este último caso será necesario recuperarlas en la clase siguiente.

La propuesta de seguimiento, Actividad 0/11, se ha pensado en relación con la utilización y explicitación de los procedimientos de cálculo y las propiedades de la multiplicación y la división involucradas en la secuencia.

El objetivo inicial es el de obtener información acerca de qué herramientas disponen los estudiantes para encarar las actividades previstas y, a partir de esta información, realizar los ajustes necesarios. Eventualmente podremos diseñar actividades complementarias con el fin de construir “puentes” entre lo que el grupo sabe y lo que consideramos necesario que separe para encarar la secuencia.

Al finalizar el trabajo con la secuencia, las actividades de seguimiento se presentarán nuevamente a los alumnos. Para no mantener exactamente las mismas situaciones, en esta segunda presentación será necesario modificar los ejemplos sobre los cuales trabajar, pero prestando especial cuidado a no modificar el tipo de tarea que se requiere ni el saber necesario para resolverla. Si esta información nos mostrara que algunos alumnos no han avanzado en el sentido previsto, podremos elaborar actividades específicas, que aseguren que todos y todas puedan usar la multiplicación y la división para resolver problemas, teniendo control sobre los procedimientos utilizados y los resultados obtenidos. También se espera que frente a un problema de cálculo los alumnos puedan elegir qué procedimiento usar (mental, algorítmico, con la calculadora) según los números involucrados, y que puedan explicitar las propiedades de las operaciones involucradas en esos procedimientos.

La **Actividad 1** recupera los conocimientos anteriores con un problema que, luego de resolverlo, habilita la discusión sobre el orden en que se deben realizar una serie de cálculos para responder la pregunta planteada. Esto permite explicitar relaciones que se hayan usado de manera implícita y así advertir el estado de esos conocimientos en el grupo. En este problema los datos no se presentan en el orden en el que deben ser usados, lo que llevará seguramente a la necesidad de leer varias veces el enunciado. El conjunto de operaciones puede ser realizado inicialmente en forma separada para luego trabajar con los resultados y también se puede armar una o dos expresiones combinadas, lo que podrá dar lugar a discutir el uso de los paréntesis.

Luego, en la **Actividad 2**, se propone un juego en el que los alumnos deben operar con tres números para obtener un resultado cercano a un cuarto número mayor que ellos tres, y el resultado de la operación podrá ser mayor o menor. Si bien se pueden probar diferentes combinaciones al azar, las ideas sobre disminuir y aumentar asociadas a la resta y la división, y a la suma y la multiplicación permiten orientar la búsqueda.

Al reflexionar sobre los distintos cálculos que se resolvieron en la **Actividad 3** aparece en forma explícita la necesidad de considerar el orden en que se realizan las operaciones y, por lo

tanto, si es necesario o no indicar ese orden con paréntesis. También se plantea la discusión sobre el orden para ir entrando los datos en una calculadora para obtener el resultado deseado

La **Actividad 4**, en contexto matemático, retoma en parte la combinación de operaciones trabajada en las dos anteriores y avanza sobre las ideas de número primo y número compuesto, relacionadas con “números que no se puedan descomponer en más de 2 factores” y “números que se pueden obtener como producto de al menos tres factores”, a través de distintas tareas. Se propone primero descomponer un número en factores, y utilizando sumas y multiplicaciones; luego se pide analizar la validez de una afirmación referida a la posibilidad, o no, de descomponer un número en factores y finalmente la tarea es proponer ejemplos para ilustrar los dos casos posibles.

Las tres actividades siguientes apuntan a analizar procedimientos de cálculo de multiplicaciones y divisiones, y a revisar las propiedades de las operaciones como justificación de los mismos.

En la **Actividad 5** se trata de considerar dos formas posibles de descomponer los números que intervienen en una multiplicación. Una alternativa es descomponer en factores y utilizar la propiedad asociativa, y eventualmente también la conmutativa, para justificar la transformación.

Si los alumnos solo hacen referencia a ellas de forma coloquial, será el momento de precisar el vocabulario específico. Otra es descomponer en sumas y justificar la transformación utilizando la propiedad distributiva. Cabe señalar que Sandra “descompone bien” y reconoce el uso de la propiedad distributiva, pero al resolver multiplica por 4 y no por 40 y por eso obtiene un resultado incorrecto. Luego se propone analizar qué alternativa conviene según cuáles sean los números involucrados.

Para abordar el caso de la división, que usualmente suele presentar más dificultad a los alumnos, se propone primero analizar el alcance de la propiedad distributiva para la división y luego se presentan dos estrategias para estimar el cociente.

En la **Actividad 6** primero se propone discutir si es posible, o no, descomponer en sumando el dividendo o el divisor. Luego se avanza analizando cómo elegir los sumandos para descomponer el dividendo, de modo que se facilite el cálculo. Si bien lo que dice Pedro es cierto (sólo hay que tener cuidado y no olvidarse de los “restos” parciales) conviene elegir al menos un sumando que sea múltiplo para facilitar el cálculo y hacer menos aproximaciones.

La Tarea permite ajustar el trabajo con las descomposiciones ya que se requiere operar “por partes” e ir registrando los cálculos parciales, por ejemplo calculando para el primer caso 824×147 y 16×147 . Al reunir las “partes” será necesario prestar mucha atención al valor posicional, lo que resulta una buena oportunidad para volver sobre la estructura del sistema de numeración. Si fuera necesario, se podrían proponer nuevas cuentas pero solo para analizar cómo conviene descomponer. Cabe señalar aquí que el propósito de esta actividad, y de la siguiente, no es adquirir flexibilidad en el cálculo sino analizar distintos procedimientos para comprenderlos y explicitar las propiedades involucradas. Por lo tanto, agregar ejercitación extra en este momento desviaría el foco de trabajo.

Al revisar la tarea se podría analizar la posibilidad de hacer divisiones sucesivas descomponiendo en factores el divisor “simplificando” los números. Por ejemplo, para dividir por 30, dividir primero por 10, y luego por 3 o, volviendo al caso de $945 : 9$ hacer 2 divisiones sucesivas por 3.

La división por aproximación que se presenta en la **Actividad 7** incluye procedimientos que se apoyan en conocimientos previos sobre cálculo mental: multiplicaciones por 10, 100, 1000, duplicaciones sucesivas y productos por 20, 200, 40, 400, etc. cuya disponibilidad resulta central para la comprensión de dichos procedimientos. En consecuencia, si los alumnos no los conocieran o no estuvieran acostumbrados a la práctica del cálculo mental, habría que proponer algunas actividades previas al respecto.

En los ejemplos, una de las formas de encontrar los cocientes parciales es más corta que la otra, con otros números podría ser al revés y por ello se proponen nuevos ejemplos. Esto permite comprender las dos alternativas usándolas con números distintos o más grandes y, a la vez, podría dar lugar a combinarlas.

Si bien se espera que los alumnos progresivamente puedan hacer las divisiones en menos casos, lo primordial es que puedan hacerlas bien, teniendo control de los pasos que realizan.

También es importante que se incorpore como una “rutina” estimar el resultado al iniciar el proceso y controlar su razonabilidad al finalizar

La **Actividad 8** lleva a analizar la validez de distintos procedimientos de cálculo, producir otros y elaborar enunciados de problemas a partir de las conclusiones obtenidas durante las actividades anteriores. En algunas preguntas se plantea analizar y en otras proponer diferentes escrituras para un mismo cálculo de multiplicar o dividir. En todos los casos se trata de poner en juego el conocimiento sobre las propiedades de estas dos operaciones. Se pide también inventar situaciones para cálculos sin paréntesis con una, dos y tres operaciones, lo que obliga a considerar el orden de resolución para pensar el enunciado.

En la **Actividad 9** se presenta un problema en contexto extramatemático que, a la vez que permite aplicar lo aprendido, da lugar a explorar la generalización de los procedimientos utilizados.

Las preguntas iniciales requieren realizar multiplicaciones del valor hora por el número de horas y sumar el dinero de los dos trabajadores. La inclusión posterior de la calculadora lleva a relacionar los cálculos parciales y precisar el orden en que se deben realizar las operaciones.

Luego, se pregunta por una forma más general de hacer el cálculo, que los chicos pueden expresar diciendo: “para calcular el pago hay que multiplicar la cantidad de horas que trabaja cada uno por el valor de su hora y sumarlo” o “para calcular el pago hay que sumar el valor de la hora de cada uno y multiplicarlo por la cantidad de horas que trabajan juntos y sumarle 50\$ que son las dos horas más que trabaja el ayudante”. También se podría pedir a los alumnos que escribieran el cálculo que hay que hacer usando H y h para el valor de la hora de cada trabajador y C y c para las respectivas cantidades de horas o usar $C = c + 2$.

Si bien no se espera que necesariamente se usen letras, este tipo de trabajo es el que prepara tanto la producción como el uso de fórmulas.

La **Actividad 10** es de síntesis de la secuencia y apunta a revisar el proceso de aprendizaje.

Por ser auto – evaluativa da lugar a que el alumno tome conciencia de lo que repasó, de lo nuevo que aprendió y también que pueda responsabilizarse de aquellos aprendizajes que aún no ha logrado.

En relación con la **Actividad 0/11** cabe señalar que, tanto cuando se propone al inicio como cuando se hace luego de haber realizado las actividades de la secuencia, su objetivo debe ser explicitado a los alumnos. Comprender el sentido de esta tarea es vital para que los alumnos vayan tomando mayor conciencia acerca de su propio proceso de aprendizaje y puedan enfrentarse a esta instancia con naturalidad y sin temor. Esto les permitirá, eventualmente, escribir “no sé”, “no me acuerdo” o “no me lo enseñaron”. Reconocer, frente a una situación nueva, qué es lo que se puede hacer y qué no, es el primer paso para afrontar nuevos aprendizajes.

La relación entre cálculo y enunciado que hay que poner en juego en el ítem 1 se estudia en las actividades 1, 8 e) y en la 9. Antes de iniciar la secuencia los alumnos podrían hacer cálculos parciales para luego operar con los resultados, y es posible que no todos los chicos interpreten correctamente el uso de los paréntesis.

En el problema 2, es necesario transformar las divisiones en otras operaciones para responder, lo que pone en primer plano su relación con la multiplicación, cuestión que los alumnos podrían no reconocer antes de iniciar este recorrido.

En cuanto al problema 3 da lugar a pensar en diferentes transformaciones de cálculos y decidir cuáles son válidas en función de las propiedades que cumplen. Es probable que en este caso el avance se de en la posibilidad, o la forma, de explicar.

Por último, el ítem 4 pide sintetizar en qué casos y cómo usar las propiedades para resolver multiplicaciones y divisiones, cuestión sobre la que se tendría que observar un avance significativo en las producciones al finalizar.

Actividades

Seguramente ya sabés resolver cálculos de sumar, restar, multiplicar y dividir pero, cuando hay que combinarlos, ¿da lo mismo hacerlo de distintas formas? Y al transformar un cálculo, ¿qué cambios se pueden hacer?, ¿cuáles no?

Actividad 1: Deudas pendientes

- a) En una empresa lograron ahorrar en el año \$78.000. Quieren saldar las 12 cuotas pendientes de \$ 2500 de una maquinaria. Pagarán un bono a sus 32 empleados de \$ 1200 a cada uno. Realizarán una fiesta de fin de año cuyo costo será de \$ 2735. También tienen ahorrados del año anterior \$ 24.400 y depositado en una cuenta \$ 11.000. Deciden ponerse al día con la deuda impositiva de \$ 4500 y para ello deberán pagar intereses de cuatro cuotas de \$ 421.
¿Les alcanza para todos sus planes?
- b) Reunite con otros compañeros y compartan sus producciones
- ¿Llegaron a los mismos resultados?
- ¿Hicieron las mismas cuentas?
- ¿Cómo ordenarían los cálculos para hacerlos con una calculadora sin anotar resultados parciales? ¿Hay una sola forma de hacerlo?

Actividad 2: El juego de Lo más cerca posible

Para jugar, júntense en grupos de cuatro compañeros. Van a necesitar un mazo de 24 tarjetas con los números 100, 200, 300, 400, 500, 1000; 10, 20 hasta 90 y 1, 2, hasta 9. Tienen que mezclar todas las cartas y ponerlas en una pila boca abajo. Un jugador debe sacar las cuatro primeras cartas de la pila colocarlas boca arriba, en el centro para que todos las vean. La carta con el número mayor se separa de las otras tres. Luego, cada uno de los jugadores tiene que escribir un cálculo con los otros tres números. El resultado de ese cálculo tiene que estar lo más cerca posible del número de la carta separada, pero puede ser mayor o menor que este. Gana 2 puntos el que obtiene el resultado más cercano. Si hay más de un jugador que haya obtenido el mismo resultado, cada uno de ellos obtiene un punto. Se juega hasta terminar con las cartas y gana el jugador que sumó más puntos en total.

Después de jugar, respondé a estas preguntas:

- a) Si se decide que gana el que más se aproxima a la carta separada, pero con un resultado que sea menor al número de esta carta, ¿en qué se modifica el juego?
- b) Tomando en cuenta esta última regla, ¿cuáles son las estrategias que usarías para ganar? ¿Por qué?

Tarea

Anotá dos cálculos: uno cuyo resultado esté cerca de 200 y otro que esté cerca de 400 eligiendo, cada vez, tres de los siguientes números: 20, 30, 40, 5 y 8.

Actividad 3: Después del juego

Los cálculos siguientes los escribió Pedro cuando jugaba a "Lo más cerca posible" y habían salido las tarjetas: 200, 50, 3, y 70

$50 \times 3 + 70$ $70 \times 3 - 50$ $(50 + 70) \times 3$ $50 \times 70 : 3$

- a) Sin hacer los cálculos, decidí qué cálculo está más lejos del resultado.
- b) ¿Qué cálculo gana?
- c) Pedro dice que cincuenta por tres más setenta es 220 y Ayelén dice que da 3650. ¿Cómo llegó cada uno a ese resultado?
- d) Con las cartas 60, 10, 8 y 50 Juana usó la calculadora y dijo:
 - Si hacés sesenta, menos, diez, por, ocho, da cuatrocientos. Si hacés sesenta, más, diez, por, ocho, da quinientos sesenta que está más cerca.
 - Celina comentó:
 - Esa calculadora anda mal, sesenta, más diez por ocho da ciento cuarenta y estás muy lejos de quinientos. Y la otra cuenta no da.
 - ¿Estás de acuerdo con Celina? ¿Por qué?
- e) Resuelvan con la calculadora y registren distintos cálculos combinando los números 60, 10, 8 y las cuatro operaciones básicas. ¿Da lo mismo resolverlos usando cualquier calculadora?

Tarea

- a) ¿Da lo mismo calcular el siguiente del doble de un número que hacer el doble del siguiente del número?
- b) Si a un número se le suma su doble, ¿se obtiene el mismo resultado que si se hace el triple del número?

Actividad 4: Combinando operaciones

- I. Encontrá todas las maneras posibles de obtener 200:
 - a) multiplicando dos números naturales.
 - b) multiplicando más de dos números naturales.
 - c) como resultado, utilizando sumas y multiplicaciones de números naturales.
- II. ¿Es cierto que no es posible obtener 121 multiplicando más de dos números naturales?
- III. Escribí tres ejemplos de números que se puedan escribir multiplicando varios factores y otros tres de números que no se puedan descomponer en más de 2 factores.

Tarea

Se realizó una compra de 10 calculadoras a \$ 160 cada una. Por cada una se paga un adicional de \$15 por la garantía y se hizo un descuento de \$80 por la compra total por pago en efectivo.

- a) Estimá si la compra va a superar o no los \$ 2000.
- b) ¿Cuál o cuáles de los siguientes cálculos permite saber cuánto se pagó en total?

$$\begin{aligned} & (160 + 15) \times 10 - 80 \\ & 160 + 15 \times 10 - 80 \\ & 160 \times 10 + 15 \times 10 - 80 \\ & (160 + 15 - 80) \times 10 \end{aligned}$$

Actividad 5: Descomponer para multiplicar

- a) Analizá esta forma de multiplicar y explicá qué propiedades aseguran que los resultados que se obtienen son correctos:

$$\begin{array}{l} 14 \times 36 = \\ 7 \times 2 \times 9 \times 4 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \downarrow \\ 63 \times 2 \times 2 \times 2 = 126 \times 2 \times 2 = 252 \times 2 = 504 \end{array}$$

- c) Usen el método de Juana para resolver: $6580 : 32 =$ $13.875 : 425 =$
 d) ¿Piensan que podrían modificar el método de Juana o el de Lucio para hacer la cuenta en menos pasos? ¿Cómo?

Actividad 8: ¿Vale o no vale?

- a) Decidí si los resultados de los cálculos que se presentan a continuación son los mismos que el resultado de 128×34 .
 Justificá tus respuestas usando las propiedades de las operaciones y sin hacer cuentas.
 $100 \times 34 + 20 \times 34 + 8 \times 34$
 $128 \times 35 - 128 \times 1$
 $128 \times 40 - 128 \times 6$
 $128 \times 17 \times 2$
 $128 \times 30 + 4 =$
 b) Escribí 3 formas distintas de calcular 224×36 .
 c) Decidí si los resultados de los cálculos que se presentan a continuación tienen el mismo resultado que $374 : 34$. Justificá tus respuestas usando las propiedades de las operaciones y sin hacer cuentas.
 $374 : 30$ y el resultado dividido 4
 $374 : 17$ y luego dividido 2
 $340 : 34 + 34 : 34$
 d) Escribí 3 formas distintas de calcular $6480 : 36$.

Tarea

Elaborá tres problemas. Cada uno debe poder resolverse mediante uno de los siguientes cálculos

128×34

$128 \times 30 + 4$

$128 \times 30 + 128 \times 4$

Actividad 9: Cálculos en una jornada de trabajo

- a) Respondé las siguientes preguntas. Prestá particular atención a la información disponible y a los procedimientos usados en cada caso. Un pintor trabaja con un ayudante. El pintor gana \$60 la hora y el ayudante \$25. El lunes van a trabajar, el ayudante llega a las 8 y el pintor a las 10.
 - ¿Cuánto ganaron ese día si trabajaron hasta las 2 de la tarde?
 - Si cada día de esta semana el ayudante trabaja dos horas más que el pintor, ¿cuánto ganan entre los dos cuando el pintor trabaja 4 horas? ¿y si trabaja 8?
 b) Anotá qué operaciones tenés que hacer con la calculadora para obtener:
 - lo que ganan juntos el plomero y el ayudante, si el plomero trabajó 6 horas.
 - lo que gana el plomero, si al ayudante trabajó 10 horas;
 c) Compará tus cálculos con los de otros compañeros, ¿hay otras formas de resolver y obtener el mismo resultado?
 d) ¿Qué cálculo puede hacer el plomero para saber lo que debe cobrar por un trabajo cuando va con su ayudante?

Actividad 10: Mirar lo que aprendimos

- a) ¿Qué actividades te resultaron más fáciles?
 b) ¿Cuáles te costaron más? ¿Por qué pensás que te resultaron más difíciles?
 c) ¿Cuándo tenés que hacer distintas operaciones con la calculadora o mentalmente, ¿da lo mismo hacerlo de distintas formas?, ¿qué tenés que tener en cuenta?
 d) Al transformar un cálculo, ¿qué cambios se pueden hacer?, ¿cuáles no?
 e) ¿Cuáles son las propiedades de las operaciones que ya conocías y pudiste utilizar? Escribí esas propiedades de la manera más sintética que puedas.
 f) ¿Aprendiste alguna forma nueva de realizar cálculos o de estimar resultados?
 ¿Cuál?
 g) ¿Tendrías que repasar algo más para poder resolver cualquier suma, resta, multiplicación o división y poder controlar si el resultado es correcto?

2. Con calculadora

- a) Explicá como se puede resolver $524 : 37$ usando una calculadora en la que no funciona la tecla correspondiente a la división.
 b) Cuando dividimos 5013 por un número obtuvimos 135 como cociente y 18 de resto. ¿Cómo usarías la calculadora para averiguar el divisor?

3. Para explicar

- a) Para resolver 427×30 ,
 - ¿qué conviene hacer $427 \times 3 \times 10$ ó $427 \times (10 + 20)$? ¿Por qué?
 - ¿Qué propiedad aplicas en cada caso?
 b) Para resolver el cálculo $2709 : 9$,
 - ¿Qué conviene hacer $2700 : 9 + 9 : 9$ ó $2709 : 3 : 3$? ¿Por qué?
 - ¿Qué propiedad aplicás en cada caso?

4. Para registrar lo que aprendiste

- a) ¿Cuáles son las propiedades de las operaciones que usás al resolver una cuenta de multiplicar?
 b) ¿Y para dividir se pueden usar las mismas propiedades? ¿Cómo?